



CONCURSUL JUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „PETRU MAIOR”
Colegiul „Petru Maior” Reghin
EDIȚIA a II-a, 9.04.2022
Clasa a XI-a

BAREM DE EVALUARE ȘI CORECTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

Problema 1:

Fie matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 2^x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

- a) Calculați suma $S = A(0) + A(1) + A(2) + \dots + A(2022)$.
- b) Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$
- c) Calculați produsul $P = A(-2022) \cdot A(-2021) \cdot \dots \cdot A(2021) \cdot A(2022)$
- d) Rezolvați ecuația matriceală $A(2) \cdot X = A(-2)$.

Rezolvare

a) $S = \begin{pmatrix} 2023 & 0 & 1011 \cdot 2023 \\ 0 & 2^{2023} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2023 \end{pmatrix}$, după calcul direct. (2p)

b) se verifică prin calcul direct (1p)

c) din punctul b), se vede că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y) = A(y + x) = A(y) \cdot A(x)$

Înmulțirea matricelor fiind asociativă, avem $P = (A(-2022) \cdot A(2022)) \cdot (A(-2021) \cdot A(2021)) \cdot \dots \cdot (A(-1) \cdot A(1)) \cdot A(0) = A(0) \cdot A(0) \cdot \dots \cdot A(0) = A(0)$. $A(0) = I_3$, deci $P = I_3$. (2p)

d) $\det A(2) = 4 \neq 0$, deci există $A(2)^{-1}$ unică și $X = A(2)^{-1} \cdot A(-2)$ soluție unică. Din punctul b) avem că $A(2) \cdot A(-4) = A(-2)$, atunci din unicitatea lui X , avem $X = A(-4)$ (2p)

Problema 2:

Se consideră determinantul $\Delta(x) = \begin{vmatrix} 2 & -x & x-1 \\ 1-x^2 & x^2 & -1 \\ 2-2x & x & x-2 \end{vmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

- a) Calculați $\Delta(-1)$
- b) Arătați că $\Delta(x) = x \cdot (x - 1)^2$
- c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\Delta(\log_3 x) \leq 0$

Rezolvare

$$a) \Delta(-1) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -4 \quad (1p)$$

$$b) \Delta(x) = \begin{vmatrix} 2 & -x & x-1 \\ 1-x^2 & x^2 & -1 \\ 2-2x & x & x-2 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 2 & -1 & x-1 \\ 1-x^2 & x & -1 \\ 2-2x & 1 & x-2 \end{vmatrix} =$$

$$x \begin{vmatrix} 2 & -1 & x-1 \\ -x^2+2x-1 & x-1 & 1-x \\ 2-2x & 1 & x-2 \end{vmatrix} = x(x-1) \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & x-1 \\ 1-x & 1 & -1 \\ 2-2x & 1 & x-2 \end{vmatrix} = x(x-1) \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & x-1 \\ 1-x & 1 & -1 \\ 1-x & 0 & x-1 \end{vmatrix} = x(x-1)^2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & x-1 \\ 1-x & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x \cdot (x-1)^2 \quad (3p)$$

$$c) \text{ Cum } \Delta(\log_3 x) = \log_3 x \cdot (\log_3 x - 1)^2, \text{ rezolvăm inecuația } \log_3 x \cdot (\log_3 x - 1)^2 \leq 0$$

Din condiția de existență avem $x > 0$ (1p)

Avem $\log_3 x \leq 0$ deci $x \in (0, 1]$ (1p)

sau $\log_3 x - 1 = 0$ deci $x = 3$, soluția fiind $x \in (0, 1] \cup \{3\}$ (1p)

Problema 3:

$$\text{Se consideră funcția } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x \cdot \sin \frac{1}{x} + m^2 - m, & x > 0 \end{cases}, m \in \mathbb{R}$$

- Determinați valorile numărului real m pentru care funcția este continuă
- Determinați ecuația asimptotei la graficul funcției spre $-\infty$
- Demonstrați că funcția admite asimptotă la graficul funcției spre $+\infty$, pentru orice valoare a numărului real m

Rezolvare

a) f este continuă pe $(-\infty, 0)$ și $(0, +\infty)$, $\forall m \in \mathbb{R}$ (operații cu funcții elementare) (1p)

$$f \text{ este continuă în } x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} f(x) = f(0) \quad \lim_{x \nearrow 0} f(x) =$$

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+4}+2)} = \frac{0}{4} = 0, \lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} + m^2 - m = m^2 - m, \text{ iar } f(0) = 0.$$

$$\text{Atunci } m^2 - m = 0, \text{ cu soluția } m \in \{0, 1\} \quad (2p)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right)} = -1, \text{ deci } y = -1 \text{ este}$$

ecuația asimptotei orizontale graficul funcției spre $-\infty$ (2p)

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \sin \frac{1}{x} + m^2 - m = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \sin \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} m^2 - m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} +$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} m^2 - m = m^2 - m + 1$, deci $\forall m \in \mathbb{R}$, funcția admite asimptotă orizontală la graficul funcției

spre $+\infty$, dreapta de ecuație $y = m^2 - m + 1$ (2p)

Problema 4:

Calculați limitele:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - x)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2 - 4x + 4)}{x^2 - 9}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x+1} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}} \right)$$

Rezolvare

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} + x \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} + x^2} = \frac{1}{3} \quad (1p)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2 - 4x + 4)}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(1 + x^2 - 4x + 3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(1 + x^2 - 4x + 3)}{(x-3)(x-1)} \cdot \frac{x-1}{x+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad (2p)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 1 + 1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2 \frac{3x}{2} + 2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9}{4} \cdot \frac{-2\sin^2 \frac{3x}{2}}{\frac{9x^2}{4}} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}} = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} = -4 \quad (2p)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x+1} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x+1} \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}} - 1 \right)}{\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}} \cdot \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}(x+1-1)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2} \quad (2p)$$